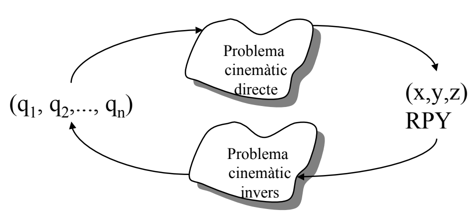
Tema II: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades.
2 Problema Cinemàtic Directe.
3 Problema Cinemàtic Invers.

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

Introducció

• Dintre de la cinemàtica estudiarem 2 problemes:



Problema cinemàtic directe

Donat el vector de variables (q_1, q_2,..., q_n) d'unió determinar la posició (x,y,z) i l'orientació (RPY) de l'E.T. Respecte del sistema de coordenades de la base del robot.

Problema cinemàtic invers

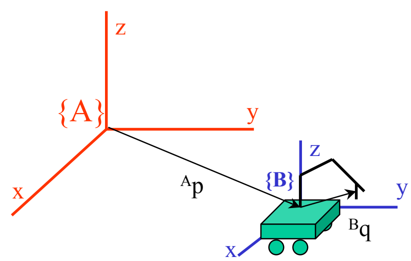
Donada una determinada posició (x,y,z) i una determinada orientació (RPY) obtenir el valor de les variables d'unió (q_1, q_2,..., q_n) que situen el manipulador en la configuració desitjada.

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

2.1 Sistemes de Coordenades

• Imaginem un robot mòbil equipat amb un manipulador.
• Coneixem la posició cartesiana de l'E.T (^{B}q) respecte al sistema de coordinades {B}.
• També coneixem la posició del mòbil (^{A}p) respecte d'un sistema de coordenades fix {A}.

Podem conèixer q respecte {A} (^{A}q)?

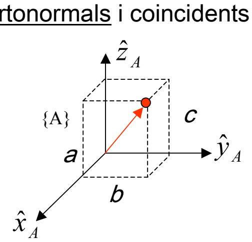


Tema II: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

2.1 Sistemes de Coordenades

• <u>Sistema de coordenades en l'espai:</u> Conjunt <u>complet</u> de vectors <u>ortonormals</u> i coincidents en un punt.



$$\text{vectors unitaris} \begin{cases} \hat{x} = (1 \quad 0 \quad 0)^T \\ \hat{y} = (0 \quad 1 \quad 0)^T \\ \hat{z} = (0 \quad 0 \quad 1)^T \end{cases}$$

$$\hat{p} = (a \quad b \quad c)^T = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z}$$

$$a = \hat{p} \cdot \hat{x}$$

$$b = \hat{p} \cdot \hat{y}$$

$$c = \hat{p} \cdot \hat{z}$$

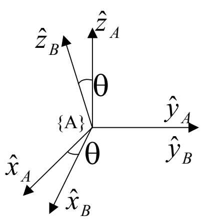
$$\text{on} \quad \hat{p} \cdot \hat{x} = |\hat{p}| \cdot |\hat{x}| \cdot \cos(\theta)$$

•<u>Sistema de coordenades de referència:</u> Sistema de coordenades a l'espai al qual es referencien tots els punts i altres sistemes de coordenades.

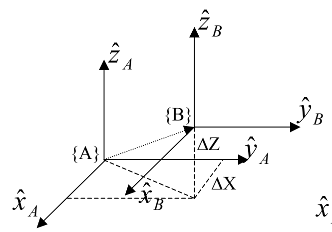
1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

2.2 Canvis de Sistemes de Coordenades

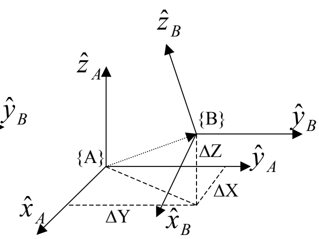
• <u>Transformacions en l'espai:</u> Rotacions i traslacions dels sistemes de coordenades respecte del sistema de coordenades de referència.



Rotació d'un angle θ al voltant de l'eix Y.



Translació al punt $(x\ y\ z)^T$



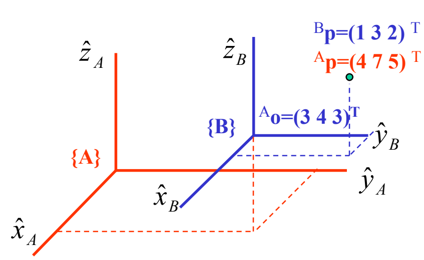
Combinació una traslació i d'una rotació i al voltant de l'eix Y del sistema de referència {B}.

1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

Translació

- {B} és una translació de {A} a la posició $^A(3\ 4\ 3)^T$.
- Els eixos de coordenas de {B} són paral·lels als de {A}.
- La translació es pot representar mitjançant una suma vectorial.

$$\begin{pmatrix} {}^Ap_x \\ {}^Ap_y \\ {}^Ap_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^Bp_x \\ {}^Bp_y \\ {}^Bp_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^Ao_x \\ {}^Ao_y \\ {}^Ao_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^Bp_x + {}^Ao_x \\ {}^Bp_y + {}^Ao_y \\ {}^Bp_z + {}^Ao_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} {}^Ap_x \\ {}^Ap_y \\ {}^Ap_z \end{pmatrix} = {}^B\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + {}^A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = {}^A\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$



Tema II: Cinemàtica de la Posició.

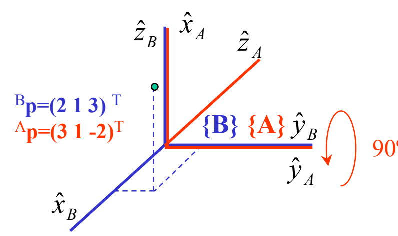
Rotació

Rot(θ, $\hat{y}_A$)

- {B} és una rotació de 90º de {A} respecte l'eix $\hat{y}_A$.
- La rotació es pot representar mitjançant un producte matricial.

$$\begin{pmatrix}{}^Ap_x\\{}^Ap_y\\{}^Ap_z\end{pmatrix} = {}^A\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\0 & 1 & 0\\-\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}_B \cdot \begin{pmatrix}{}^Bp_x\\{}^Bp_y\\{}^Bp_z\end{pmatrix}$$

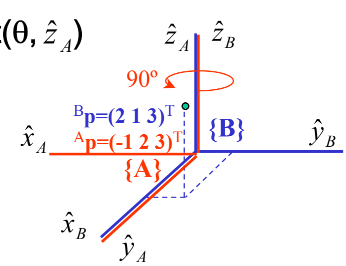
$$\begin{pmatrix}{}^Ap_x\\{}^Ap_y\\{}^Ap_z\end{pmatrix} = {}^A\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix}_B * {}^B\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$$



Tema II: Cinemàtica de la Posició.

Rotació

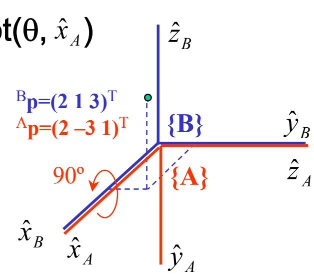
Rot(θ, $\hat{z}_A$)



$$\begin{pmatrix}{}^Ap_x\\{}^Ap_y\\{}^Ap_z\end{pmatrix} = {}^A\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0\\\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}_B \cdot \begin{pmatrix}{}^Bp_x\\{}^Bp_y\\{}^Bp_z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}{}^Ap_x\\{}^Ap_y\\{}^Ap_z\end{pmatrix} = {}^A\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}_B \cdot {}^B\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = {}^A\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Rot(θ, $\hat{x}_A$)



$$\begin{pmatrix}{}^Ap_x\\{}^Ap_y\\{}^Ap_z\end{pmatrix} = {}^A\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta\\0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta\end{pmatrix}_B \cdot \begin{pmatrix}{}^Bp_x\\{}^Bp_y\\{}^Bp_z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}{}^Ap_x\\{}^Ap_y\\{}^Ap_z\end{pmatrix} = {}^A\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}_B \cdot {}^B\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = {}^A\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

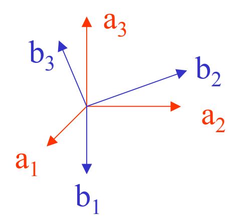
2.3 Justificació de les matrius de Rotació I

Proposició

Siguin {A} i {B} sistemes de coordenades ortonormals amb el mateix origen i amb vectors unitaris $\{a_1, a_2, a_3\}$ $\{b_1, b_2, b_3\}$ $\exists$ una matriu R_{nxn} definida com:

$$r_{kj}=a_k \cdot b_j \quad 1\leq k,\ j \leq n$$

Tal que, $\forall$ p $\in \Re^3$ $\quad {}^Ap={}^AR_B{}^Bp$



$$\begin{pmatrix} {}^Ap_1 \\ {}^Ap_2 \\ {}^Ap_3 \end{pmatrix} = \underbrace{{}^A\begin{pmatrix} \hat{a}_1\cdot\hat{b}_1 & \hat{a}_1\cdot\hat{b}_2 & \hat{a}_1\cdot\hat{b}_3 \\ \hat{a}_2\cdot\hat{b}_1 & \hat{a}_2\cdot\hat{b}_2 & \hat{a}_2\cdot\hat{b}_3 \\ \hat{a}_3\cdot\hat{b}_1 & \hat{a}_3\cdot\hat{b}_2 & \hat{a}_3\cdot\hat{b}_3 \end{pmatrix}_B}_{{}^AR_B} \cdot \begin{pmatrix} {}^Bp_1 \\ {}^Bp_2 \\ {}^Bp_3 \end{pmatrix}$$

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

2.3 Justificació de les matrius de Rotació II

Demostració

Siguin {A} i {B} dos S.C. rotats i no traslladats

i p un punt representat pel vector $\hat{p}$ on $\begin{cases} {}^A\hat{p} = \left({}^Ap_1 \quad {}^Ap_2 \quad {}^Ap_3\right) \\ {}^B\hat{p} = \left({}^Bp_1 \quad {}^Bp_2 \quad {}^Bp_3\right) \end{cases}$

$${}^A\hat{p}={}^Ap_1\cdot{}^A\hat{a}_1+{}^Ap_2\cdot{}^A\hat{a}_2+{}^Ap_3\cdot{}^A\hat{a}_3$$

$${}^A\hat{p}={}^Bp_1\cdot{}^A\hat{b}_1+{}^Bp_2\cdot{}^A\hat{b}_2+{}^Bp_3\cdot{}^A\hat{b}_3$$

Sel·leccionem la component ${}^Ap_k$

$${}^Ap_k={}^A\hat{p}\cdot{}^A\hat{a}_k = \left[\sum_{j=1}^{3}({}^Bp_j\cdot{}^A\hat{b}_j)\right]\cdot{}^A\hat{a}_k = \sum_{j=1}^{3}{}^Bp_j\cdot\left({}^A\hat{b}_j\cdot{}^A\hat{a}_k\right) = \sum_{j=1}^{3}{}^Bp_j\cdot r_{kj}$$

$$k=1\rightarrow{}^Ap_1 = r_{11}\cdot{}^Bp_1+r_{12}\cdot{}^Bp_2+r_{13}\cdot{}^Bp_3$$

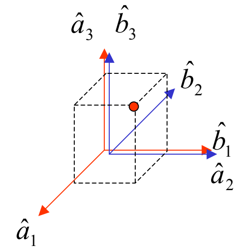
$$k=2\rightarrow{}^Ap_2 = r_{21}\cdot{}^Bp_1+r_{22}\cdot{}^Bp_2+r_{23}\cdot{}^Bp_3$$

$$k=1\rightarrow{}^Ap_3 = r_{31}\cdot{}^Bp_1+r_{32}\cdot{}^Bp_2+r_{33}\cdot{}^Bp_3$$

$$\begin{pmatrix} {}^Ap_1 \\ {}^Ap_2 \\ {}^Ap_3 \end{pmatrix} = {}^A\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}_B \cdot \begin{pmatrix} {}^Bp_1 \\ {}^Bp_2 \\ {}^Bp_3 \end{pmatrix}$$

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

Exemple



Gràficament observer que:

$$^{A}\hat{p} = \left({}^{A}p_1 \quad {}^{A}p_2 \quad {}^{A}p_3\right) = {}^{A}\left(2 \quad 2 \quad 3\right)^T$$

$$^{B}\hat{p} = \left({}^{B}p_1 \quad {}^{B}p_2 \quad {}^{B}p_3\right) = {}^{B}\left(2 \quad -2 \quad 3\right)^T$$

Fent el desenvolupament anterior comprobem que s'acompleix:

$$^{A}\hat{p} = {}^{A}p_1 \cdot {}^{A}\hat{a}_1 + {}^{A}p_2 \cdot {}^{A}\hat{a}_2 + {}^{A}p_3 \cdot {}^{A}\hat{a}_3 \Rightarrow {}^{A}\left(2 \quad 2 \quad 3\right)^T = 2 \cdot {}^{A}\left(1 \quad 0 \quad 0\right)^T + 2 \cdot {}^{A}\left(0 \quad 1 \quad 0\right)^T + 3 \cdot {}^{A}\left(0 \quad 0 \quad 1\right)^T$$

$$^{A}\hat{p} = {}^{B}p_1 \cdot {}^{A}\hat{b}_1 + {}^{B}p_2 \cdot {}^{A}\hat{b}_2 + {}^{B}p_3 \cdot {}^{A}\hat{b}_3 \Rightarrow {}^{A}\left(2 \quad 2 \quad 3\right)^T = 2 \cdot {}^{A}\left(0 \quad 1 \quad 0\right)^T + -2 \cdot {}^{A}\left(-1 \quad 0 \quad 0\right)^T + 3 \cdot {}^{A}\left(0 \quad 0 \quad 1\right)^T$$

La matriu de rotació obtinguda es doncs:

$$^{A}\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \cdot \hat{b}_1 & \hat{a}_1 \cdot \hat{b}_2 & \hat{a}_1 \cdot \hat{b}_3 \\ \hat{a}_2 \cdot \hat{b}_1 & \hat{a}_2 \cdot \hat{b}_2 & \hat{a}_2 \cdot \hat{b}_3 \\ \hat{a}_3 \cdot \hat{b}_1 & \hat{a}_3 \cdot \hat{b}_2 & \hat{a}_3 \cdot \hat{b}_3 \end{pmatrix}_B = {}^{A}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_B$$

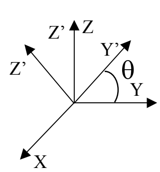
i comprovem que ens permet fer el canvi de coordenades:

$$^{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = {}^{A}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_B \cdot {}^{B}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

Obtenció de les Matrius de Rotació I

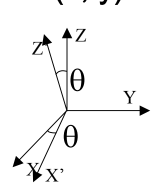
Rot(θ, x)



$$^{A}\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \cdot \hat{b}_1 & \hat{a}_1 \cdot \hat{b}_2 & \hat{a}_1 \cdot \hat{b}_3 \\ \hat{a}_2 \cdot \hat{b}_1 & \hat{a}_2 \cdot \hat{b}_2 & \hat{a}_2 \cdot \hat{b}_3 \\ \hat{a}_3 \cdot \hat{b}_1 & \hat{a}_3 \cdot \hat{b}_2 & \hat{a}_3 \cdot \hat{b}_3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\text{on} \begin{cases} |\hat{a}_i| = |\hat{b}_i| = 1, \ \forall \ 1 \le i \le 3 \\ \hat{a}_i \perp \hat{a}_j, \ \forall \ i \ne j \\ \hat{b}_i \perp \hat{b}_j, \ \forall \ i \ne j \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} \cos\left(\vartheta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\vartheta \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \sin\vartheta \end{cases}$$

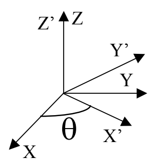
Rot(θ, y)



$$^{A}\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \cdot \hat{b}_1 & \hat{a}_1 \cdot \hat{b}_2 & \hat{a}_1 \cdot \hat{b}_3 \\ \hat{a}_2 \cdot \hat{b}_1 & \hat{a}_2 \cdot \hat{b}_2 & \hat{a}_2 \cdot \hat{b}_3 \\ \hat{a}_3 \cdot \hat{b}_1 & \hat{a}_3 \cdot \hat{b}_2 & \hat{a}_3 \cdot \hat{b}_3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & 0 & \sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Obtenció de les Matrius de Rotació II

Rot(θ, z)



$$^{A}\begin{pmatrix} \hat{a}_1\cdot\hat{b}_1 & \hat{a}_1\cdot\hat{b}_2 & \hat{a}_1\cdot\hat{b}_3 \\ \hat{a}_2\cdot\hat{b}_1 & \hat{a}_2\cdot\hat{b}_2 & \hat{a}_2\cdot\hat{b}_3 \\ \hat{a}_3\cdot\hat{b}_1 & \hat{a}_3\cdot\hat{b}_2 & \hat{a}_3\cdot\hat{b}_3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

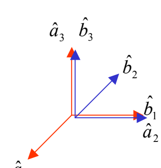
Interpretació Geométrica de les Matrius de Rotació

$$\text{Siguin}\left\{\begin{array}{l} \{B\}\text{ un S.C. obtingut a partir de la rotació de }\{A\} \\ {}^{A}R_{B}\text{ la matriu de rotació associada} \\ \left\{{}^{A}\hat{b}_1 \quad {}^{A}\hat{b}_2 \quad {}^{A}\hat{b}_3\right\}\text{ els vectors unitaris de }\{B\}\text{ representats en }\{A\} \\ \left\{{}^{B}\hat{a}_1 \quad {}^{B}\hat{a}_2 \quad {}^{B}\hat{a}_3\right\}\text{ els vectors unitaris de }\{A\}\text{ representats en }\{B\} \end{array}\right\}\text{ llavors}$$

S'acompleix que :

$$^{A}R_{B} = \begin{array}{cc} {}^{A}\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}_B & \begin{array}{c} {}^{B}\hat{a}_1 \\ {}^{B}\hat{a}_2 \\ {}^{B}\hat{a}_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} {}^{A}\hat{b}_1 & {}^{A}\hat{b}_2 & {}^{A}\hat{b}_3 \end{array} & \end{array}$$

$$\left({}^{A}R_{B}\right)^{-1} = \left({}^{A}R_{B}\right)^{T} = {}^{B}R_{A} = \begin{array}{cc} {}^{B}\begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix}_A & \begin{array}{c} {}^{A}\hat{b}_1 \\ {}^{A}\hat{b}_2 \\ {}^{A}\hat{b}_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} {}^{B}\hat{a}_1 & {}^{B}\hat{a}_2 & {}^{B}\hat{a}_3 \end{array} & \end{array}$$

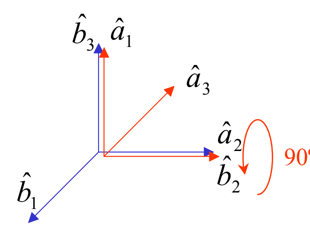


Exemple

$$\left\{{}^{A}\hat{b}_1 \quad {}^{A}\hat{b}_2 \quad {}^{A}\hat{b}_3\right\}=\left\{{}^{A}(0 \quad 0 \quad -1)^T \quad {}^{A}(0 \quad 1 \quad 0)^T \quad {}^{A}(1 \quad 0 \quad 0)^T\right\}$$

$$\left\{{}^{B}\hat{a}_1 \quad {}^{B}\hat{a}_2 \quad {}^{B}\hat{a}_3\right\}=\left\{{}^{B}(0 \quad 0 \quad 1)^T \quad {}^{B}(0 \quad 1 \quad 0)^T \quad {}^{B}(-1 \quad 0 \quad 0)^T\right\}$$

$$Rot(90^{\text{o}},\hat{b}_2)= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} {}^{A}\!\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{B} & \begin{array}{c} {}^{B}\hat{a}_1 \\ {}^{B}\hat{a}_2 \\ {}^{B}\hat{a}_3 \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} {}^{A}\hat{b}_1 & {}^{A}\hat{b}_2 & {}^{A}\hat{b}_3 \end{array} \end{array}$$



$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} {}^{B}\!\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{A} & \begin{array}{c} {}^{A}\hat{b}_1 \\ {}^{A}\hat{b}_2 \\ {}^{A}\hat{b}_3 \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} {}^{B}\hat{a}_1 & {}^{B}\hat{a}_2 & {}^{B}\hat{a}_3 \end{array} \end{array}$$

- Per Rotacions simples, podem calcular la matriu de rotació per simple inspecció geomètrica.

Propietats de les Matrius de Rotació

$$\text{Siguin}\left\{\begin{array}{l} \{\text{B}\}\text{ un S.C. obtingut a partir de la rotació de }\{\text{A}\} \\ \left\{{}^{A}\hat{b}_1 \quad {}^{A}\hat{b}_2 \quad {}^{A}\hat{b}_3\right\}\text{ els vectors unitaris de }\{\text{B}\}\text{ representats en }\{\text{A}\} \\ \left\{{}^{B}\hat{a}_1 \quad {}^{B}\hat{a}_2 \quad {}^{B}\hat{a}_3\right\}\text{ els vectors unitaris de }\{\text{A}\}\text{ representats en }\{\text{B}\} \\ {}^{A}R_B = {}^{A}\!\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}_B \quad \text{la matriu de rotació associada} \end{array}\right\}\text{ llavors :}$$

$1-.\ \ \forall\ i\ /\ 1 \le i \le 3,\ \ {}^{A}(r_{i1} \quad r_{i2} \quad r_{i3})^T$ és el vector unitari i de {B} representat en {A}

$2-.\ \ \forall\ i\ /\ 1 \le i \le 3,\ \ {}^{B}(r_{1i} \quad r_{2i} \quad r_{3i})^T$ és el vector unitari i de {A} representat en {B}

$3-.\ \ \forall\ i\ /\ 1 \le i \le 3,\ \ \left|{}^{A}(r_{i1} \quad r_{i2} \quad r_{i3})^T\right| = 1$

$4-.\ \ \forall\ i\ /\ 1 \le i \le 3,\ \ \left|{}^{B}(r_{1i} \quad r_{2i} \quad r_{3i})^T\right| = 1$

$5-.\ \ \forall\ i,j\ /\ 1 \le i \le 3, 1 \le j \le 3, \text{i} \ne \text{j},\ \Rightarrow {}^{A}(r_{i1} \quad r_{i2} \quad r_{i3})^T \cdot {}^{A}(r_{1i} \quad r_{2i} \quad r_{3i})^T = 0,$ són ortogonals

$6-.\ \ \forall\ i,j\ /\ 1 \le i \le 3, 1 \le j \le 3, \text{i} \ne \text{j},\ \Rightarrow {}^{B}(r_{1i} \quad r_{2i} \quad r_{3i})^T \cdot {}^{B}(r_{1j} \quad r_{2j} \quad r_{3j})^T = 0,$ són ortogonals

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

Matrius Homogenees

•Transformacions bàsiques:

- Translació => representada per una suma vectorial.
- Rotació => representada per un producte de matrius.

• Transformació genèrica => Translació + rotacions

• Si poguéssim representar una translació amb una matriu T, i siguin R_x , R_y , R_z les matrius de rotació

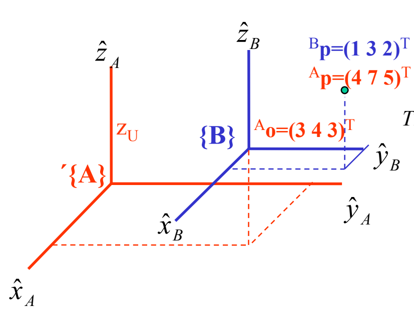
$$G=T\cdot R_{z,a}\cdot R_{y,q}\cdot R_{x,Y}$$

seria la representació d'una transformació genèrica.

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

Representació Homogenia d'una Translació



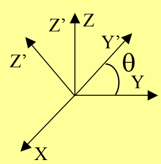
$$Trans\ ({}^{A}o_x, {}^{A}o_y, {}^{A}o_z) = {}^{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & {}^{A}o_x \\ 0 & 1 & 0 & {}^{A}o_y \\ 0 & 0 & 1 & {}^{A}o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_B$$

$${}^{A}p = \mathrm{Trans}({}^{A}o)\ {}^{B}p = {}^{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & {}^{A}o_x \\ 0 & 1 & 0 & {}^{A}o_y \\ 0 & 0 & 1 & {}^{A}o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_B * \begin{pmatrix} {}^{B}p_x \\ {}^{B}p_y \\ {}^{B}p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{A}o_x + {}^{B}p_x \\ {}^{A}o_y + {}^{B}p_y \\ {}^{A}p_z + {}^{B}p_z \\ 1 \end{pmatrix} = {}^{A}\begin{pmatrix} 3+1 \\ 4+3 \\ 3+2 \\ 1 \end{pmatrix} = {}^{A}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

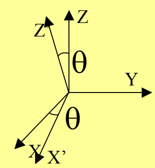
Representació Homogenia d'una Rotació

Rot(θ, x)



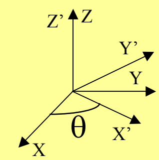
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rot(θ, y)



$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rot(θ, z)

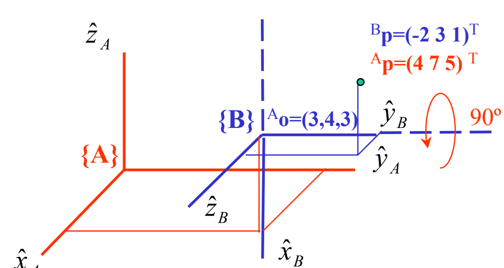


$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

Translació Seguida de Rotació



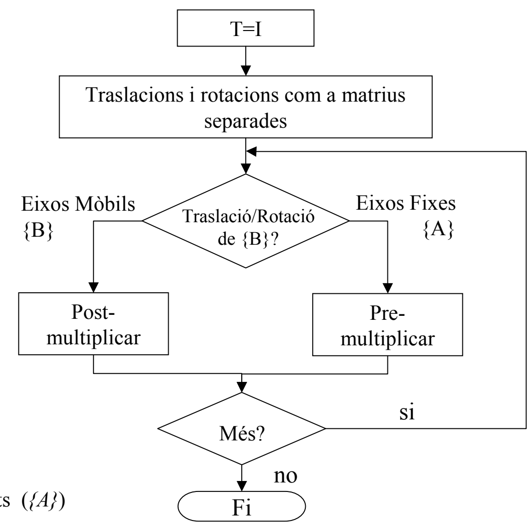
$$^A p = Trans(^A o) \bullet Rot(\hat{y}_B, \alpha) \bullet {}^B p =$$

$$\begin{pmatrix} ^A p_x \\ ^A p_y \\ ^A p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ^A o_x \\ 0 & 1 & 0 & ^A o_y \\ 0 & 0 & 1 & ^A o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} ^B p_x \\ ^B p_y \\ ^B p_z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ^A p_x \\ ^A p_y \\ ^A p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & ^A o_x \\ 0 & 1 & 0 & ^A o_y \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & ^A o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} ^B p_x \\ ^B p_y \\ ^B p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ^A p_x \\ ^A p_y \\ ^A p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow G = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & ^A o_x \\ 0 & 1 & 0 & ^A o_y \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & ^A o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

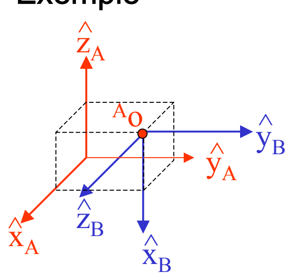
Transformacions Homogenees Compostes

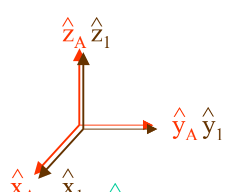


I≡Eixos conincidents (*{A}*) fixos i (*{B}*) mòbils.

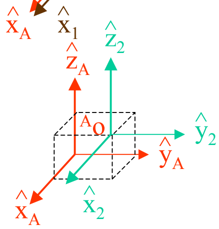
Tema II: Cinemàtica de la Posició.

Exemple





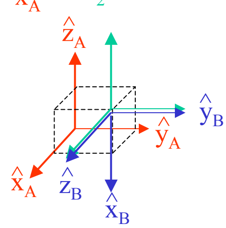
$T = I$



$T = I \cdot Trans(^A o)$

o

$T = Trans(^A o) \cdot I$



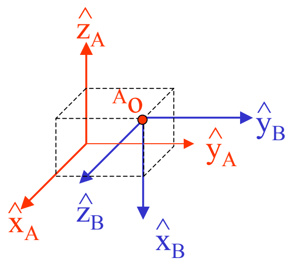
$T = I \cdot Trans(^A o) \cdot Rot(\hat{y}_2, 90)$

o

$T = Trans(^A o) \cdot I \cdot Rot(\hat{y}_2, 90)$

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

Exemple



$$T = Trans(^A o)\cdot I\cdot Rot(\hat{y}_2, 90)$$

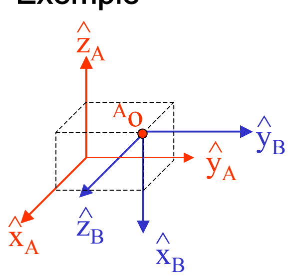
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ^A o_x \\ 0 & 1 & 0 & ^A o_y \\ 0 & 0 & 1 & ^A o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & ^A o_x \\ 0 & 1 & 0 & ^A o_y \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & ^A o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

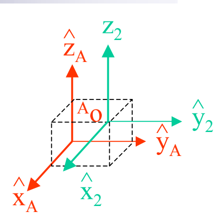
$$\left.\begin{matrix} \alpha = 90 \\ ^A o = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T \end{matrix}\right\} \Rightarrow T = {}^A\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_B$$

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

Exemple



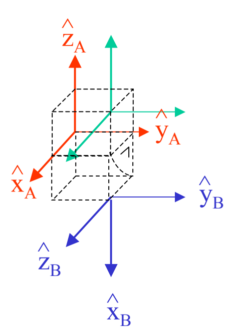
ATENCIÓ!!!
Si enlloc de Rotar respecte els eixos mòbils ho fem respecte els fixes el resultat és diferent!!



$$T = I\cdot Trans(^A o)$$

o

$$T = Trans(^A o)\cdot I$$

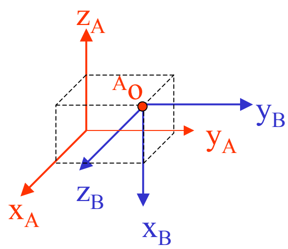


$$T = Rot(\hat{y}_2, 90)\cdot I\cdot Trans(^A o)$$

o

$$T = Rot(\hat{y}_2, 90)\cdot Trans(^A o)\cdot I$$

Exemple



I la matriu final també ho és !!!

$$T = Rot(\hat{y}_2, 90) \cdot Trans({}^A o) \cdot I$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & {}^A o_x \\ 0 & 1 & 0 & {}^A o_y \\ 0 & 0 & 1 & {}^A o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \cdot {}^A o_x + \sin\alpha \cdot {}^A o_z \\ 0 & 1 & 0 & {}^A o_y \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \cdot {}^A o_x + \cos\alpha \cdot {}^A o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 90 \\ {}^A o = (3 \quad 3 \quad 3 \quad 1)^T \end{array}\right\} \Rightarrow T = {}^A\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_B$$

Transformació Homogènia Inversa

$$\text{Si} \quad T = \left(\begin{array}{ccc|c} & R & & p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow T^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & R^T & & -R^T \cdot p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple:

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow T^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

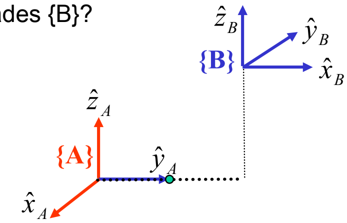
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

Exemple:

La transformació homogènia que mapeja {B} respecte {A}, és T. Quines són les coordenades del punt $^{A}p=(0,1,0)$ respecte el sistema de coordenades {B}?



$^{A}p = T\ ^{B}p$

$T^{-1} \cdot {}^{A}p = T^{-1} \cdot T\ ^{B}p$

$T^{-1} \cdot {}^{A}p = {}^{B}p$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Per tant,

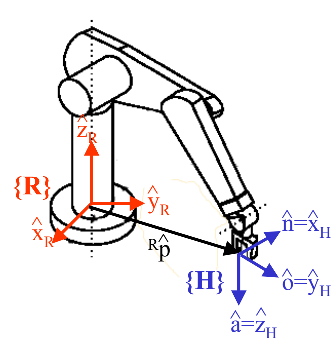
$$T^{-1} \cdot {}^{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = {}^{B}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

Representació de la Posició i l'Orientació.

- Matriu $^{R}T_{H}$
- ^{R}p + RPY$(\theta,\phi,\alpha)={}^{R}(x,y,z,\theta,\phi,\alpha)^{T}$
- Vector Configuració

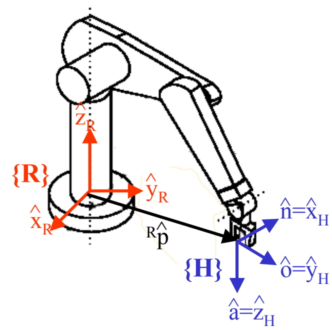


Tema II: Cinemàtica de la Posició.

UdG

- 1 Sistemes de Coordenades
- 2 Cinemàtica directa
- 3 Cinemàtica inversa

Matriu $^{R}T_{H}$



Posició de l'E.T.
Representat en {R}

$$^{R}T_{H} = {}^{R}\begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{H}$$

Vectors unitaris de {H}
Representats en {R}

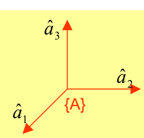
Tema II: Cinemàtica de la Posició.

UdG

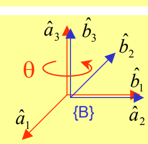
- 1 Sistemes de Coordenades
- 2 Cinemàtica directa
- 3 Cinemàtica inversa

$^{R}(x,y,z,\theta,\phi,\alpha)^{T}$

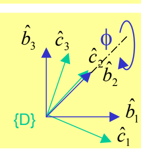
RPY (θ,ϕ,α)



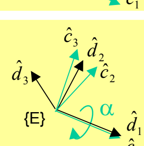
$$RPY(\theta,\phi,\alpha) = I$$



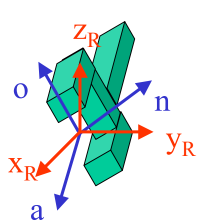
$$RPY(\theta,\phi,\alpha) = I \cdot Rot(\theta,z)$$



$$RPY(\theta,\phi,\alpha) = I \cdot Rot(\theta,z) \cdot Rot(\phi,y)$$



$$RPY(\theta,\phi,\alpha) = I \cdot Rot(\theta,z) \cdot Rot(\phi,y) \cdot Rot(\alpha,x)$$



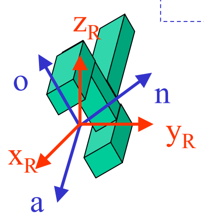
Tema II: Cinemàtica de la Posició.

$^{R}(x,y,z,\theta,\phi,\alpha)^{T}$

RPY (θ,ϕ,α)

$$RPY(\theta,\phi,\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\phi & 0 & \sin\phi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cos\theta\cdot\cos\phi & -\sin\theta\cdot\cos\alpha+\cos\theta\cdot\sin\phi\cdot\sin\alpha & \sin\phi\cdot\sin\alpha+\cos\theta\cdot\sin\phi\cdot\cos\alpha & 0\\ \sin\theta\cdot\cos\phi & \cos\theta\cdot\cos\alpha+\sin\theta\cdot\sin\phi\cdot\sin\alpha & -\cos\theta\cdot\sin\alpha+\sin\theta\cdot\sin\phi\cdot\cos\alpha & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi\cdot\sin\alpha & \cos\phi\cdot\cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}\mathrm{n} & \qquad\qquad\mathrm{o}\qquad\qquad & \qquad\qquad\mathrm{a}\qquad\qquad\end{array}\end{array}$$



- Vectors unitaris del S.C. De la mà referenciats als S.C. De la base del Robot

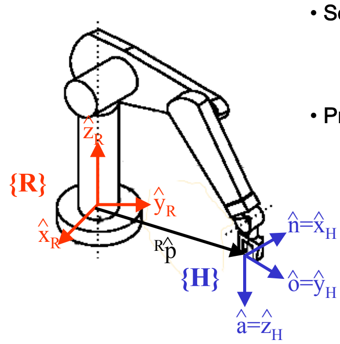
Tema II: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa

Vector Configuració



- La posició éstà representa amb $^{R}(p_x\ p_y\ p_z)$
- â defineix el Pitch i el Yaw, però no el Roll.
- **Solució:**
  - Escalem *â* multiplicant-lo pel *Roll.*

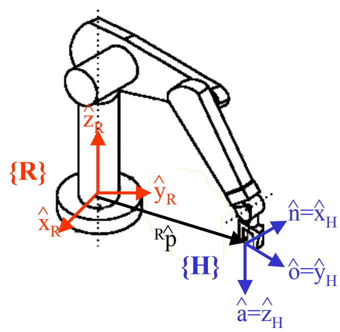
$$W={}^{R}\left(p_x \quad p_y \quad p_z \quad \theta\cdot a_x \quad \theta\cdot a_y \quad \theta\cdot a_z\right)^{T}$$

- **Problema:**
  - Que passa Quan *Roll=0?* ⇒ perdem la informació d'orientació.

$$W={}^{R}\left(p_x \quad p_y \quad p_z \quad 0 \quad 0 \quad 0\right)^{T}$$

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

Vector Configuració



- Solució:
  - Cal una funció d'escalat, que per Roll=0 no anul•li el vector.

$$e^{\frac{\theta}{\pi}} \rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow e^{\frac{\theta}{\pi}} = 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \Rightarrow 0 \le \dfrac{\theta}{\pi} \le 2 \\ e^{\frac{\theta}{\pi}} > 0, \forall \theta \end{cases}$$

$$W = {}^R\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z & e^{\frac{\theta}{\pi}} \cdot a_x & e^{\frac{\theta}{\pi}} \cdot a_y & e^{\frac{\theta}{\pi}} \cdot a_z \end{pmatrix}^T$$

  - Cal que sigui invertible per tal que es pugui recuperar la informació de Roll.

w_2

$$\theta = \pi \cdot \ln\left(\left|\hat{w}_2\right|\right)$$

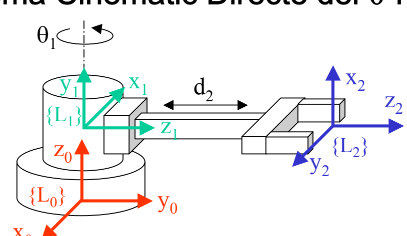
Tema II: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa

Problema Cinemàtic Directe del θ-r



$$\text{Siguin} \begin{Bmatrix} {}^0A_1 \text{ la matriu homogènea que relaciona } L_1 \text{ amb } L_0 \\ {}^1A_2 \text{ la matriu homogènea que relaciona } L_2 \text{ amb } L_1 \\ {}^2p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \end{Bmatrix} \text{ llavors}$$

$${}^1p = {}^1A_2 \cdot {}^2p$$

$${}^0p = {}^0A_1 \cdot {}^1p = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2p$$

$${}^RT_H = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 = {}^RT_H = {}^R\begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_H$$

La matriu ^RT_H és una matriu d'equacions que depenen de 2 variables: θ_1-d_2

Problema Cinemàtic Directe del θ-r

1-. Per cada link L_i, assignem un S.C. $\{L_i\}$.
2-. Calculen les matrius ${}^{i-1}A_i$ que transforma L_{i-1} en L_i.
${}^{i-1}A_i$ és una matriu homogénea que depen de q_i.
3-. Calcular

$$ {}^{R}T_{H} = \prod_{i=1}^{n} {}^{i-1}A_i = {}^{R}\begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{H} $$

Els components d'aquesta matriu són equacions que depenen de les variables d'articulació q_i.

⇩

Com assignem els sistemes de coordenades als links?

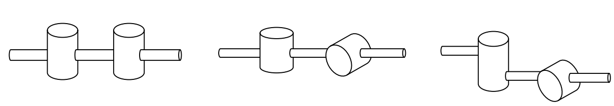
Tema II: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

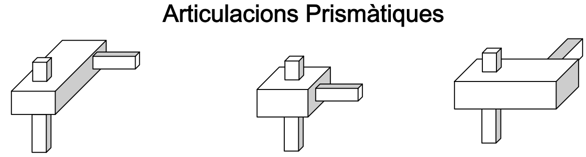
Caracterització de Braços Robòtics

• Existiexen moltes formes d'unir els links amb joins per aconseguir estructures poliarticulades:

Articulacions Angulars



Articulacions Prismàtiques



És possible trobar una matriu genérica ${}^{i-1}A_i$ que, depenent d'uns paràmetres (longitut del link, desaliniament vertical, desaliniament angular i variable d'articulació), sempre transformi L_{i-1} en L_i?

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

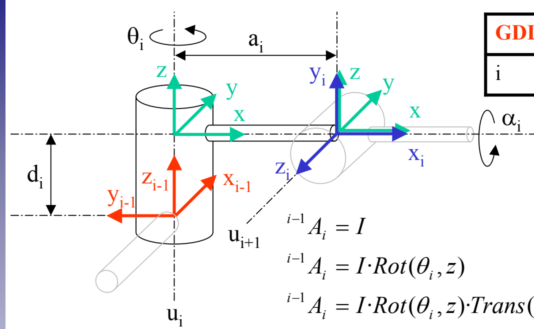
1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa

Caracterització d'Articulacions Angulars

GDLL	θ_i	d_i	a_i	α_i	Home
i	q_i	d_i	a_i	90º	-90º



$$^{i-1}A_i = I$$
$$^{i-1}A_i = I \cdot Rot(\theta_i, z)$$
$$^{i-1}A_i = I \cdot Rot(\theta_i, z) \cdot Trans(z, d_i)$$
$$^{i-1}A_i = I \cdot Rot(\theta_i, z) \cdot Trans(z, d_i) \cdot Trans(x, a_i)$$
$$^{i-1}A_i = I \cdot Rot(\theta_i, z) \cdot Trans(z, d_i) \cdot Trans(x, a_i) \cdot Rot(\alpha_i, x)$$

$$^{i-1}A_i = {}^{i-1}\begin{pmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i \cdot s\theta_i & s\alpha_i \cdot s\theta_i & a_i \cdot c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i \cdot c\theta_i & -s\alpha_i \cdot c\theta_i & a_i \cdot s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i$$

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

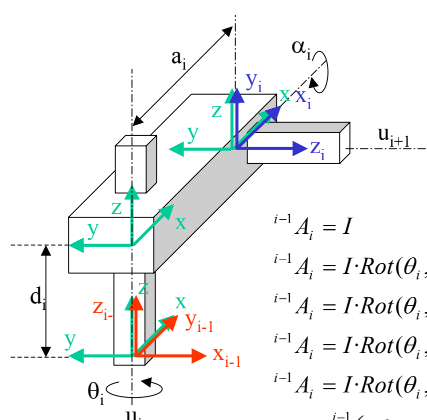
1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa

Caracterització d'Articulacions Prismàtiques

GDLL	θ_i	d_i	a_i	α_i	Home
i	90º	q_i	l_1	90º	d_i



$$^{i-1}A_i = I$$
$$^{i-1}A_i = I \cdot Rot(\theta_i, z)$$
$$^{i-1}A_i = I \cdot Rot(\theta_i, z) \cdot Trans(z, d_i)$$
$$^{i-1}A_i = I \cdot Rot(\theta_i, z) \cdot Trans(z, d_i) \cdot Trans(x, a_i)$$
$$^{i-1}A_i = I \cdot Rot(\theta_i, z) \cdot Trans(z, d_i) \cdot Trans(x, a_i) \cdot Rot(\alpha_i, x)$$

$$^{i-1}A_i = {}^{i-1}\begin{pmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i \cdot s\theta_i & s\alpha_i \cdot s\theta_i & a_i \cdot c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i \cdot c\theta_i & -s\alpha_i \cdot c\theta_i & a_i \cdot s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i$$

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

Algorisme de Denavit-Hartenberg (DH)

0. Numereu les **unions** des de 1 fins a *n* començant per la base i acabant pel yaw, pitch i roll de l'element final (en aquest ordre).

1. Assigneu el sistema de coordenades L_0 a la base, assegurant-vos que Z_0 coincideix amb l'eix de la unió 1, i inicialitzeu k=1.

2. Feu coincidir Z_k amb l'eix de la unió k+1.

3. Poseu l'origen de L_k a la interseció dels eixos Z_k i Z_{k-1}. Si Z_k i Z_{k-1} no intersecten, utilitzeu la intersecció de Z_k amb una normal comuna a Z_k i Z_{k-1}.

4. Poseu X_k de manera que sigui ortogonal a Z_k i Z_{k-1}. Si Z_k i Z_{k-1} són paral•lels, feu X_k perpendicular a Z_{k-1}.

5. Seleccioneu Y_k per acabar de completar el sistema de coordenades L_k.

6. Feu k=k+1. Si k<n, torneu al pas 2.

7. Poseu l'origen de L_n a la punta de l'element final. Feu coincidir Z_n amb el vector **a** (approach), Y_n amb el vector **s** (sliding) i X_n amb el vector normal de l'element final. Feu k=1.

8. Poseu el punt b_k a la intersecció dels eixos X_k i Z_{k-1}. Si no intersecten, poseu-lo a la intersecció d'X_k amb una normal comuna a X_k i Z_k.

9. $\boldsymbol{\theta_k}$ és l'angle de rotació des de X_{k-1} a X_k mesurat sobre Z_{k-1}.

10. $\mathbf{d_k}$ és la distància des de l'origen del sistema de coordenades L_{k-1} al punt b_k mesurat al llarg de l'eix Z_{k-1}.

11. $\mathbf{a_k}$ és la distància des del punt b_k a l'origen del sistema de coordenades L_k mesurat al llarg de X_k.

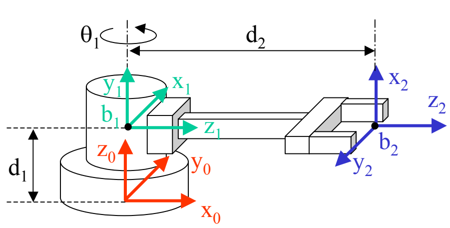
12. $\boldsymbol{\alpha_k}$ és l'angle de rotació des de Z_{k-1} a Z_k mesurat sobre X_k.

13. Feu k=k+1. Si k<n aneu al pas 8.

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

Problema Cinemàtic Directe del θ-r



GDLL	θ_i	d_i	a_i	α_i	Home
1	q_1	d_1	0	90	90º
2	90º	q_2	0	0	d_2

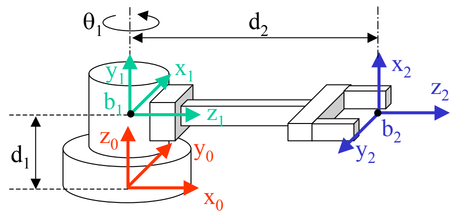
$$
{}^{i-1}A_i = {}^{i-1}\begin{pmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i\cdot s\theta_i & s\alpha_i\cdot s\theta_i & a_i\cdot c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i\cdot c\theta_i & -s\alpha_i\cdot c\theta_i & a_i\cdot s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i
\quad
{}^{0}A_1 = {}^{0}\begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_1
\quad
{}^{1}A_2 = {}^{1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_2
$$

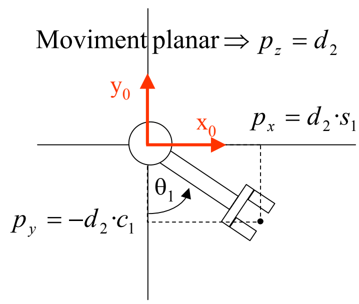
$$
{}^{R}T_H = {}^{0}A_1\cdot{}^{1}A_2 = {}^{0}\begin{pmatrix} 0 & -c_1 & s_1 & d_2\cdot s_1 \\ 0 & -s_{10} & -c_1 & -d_2\cdot c_1 \\ 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_1
$$

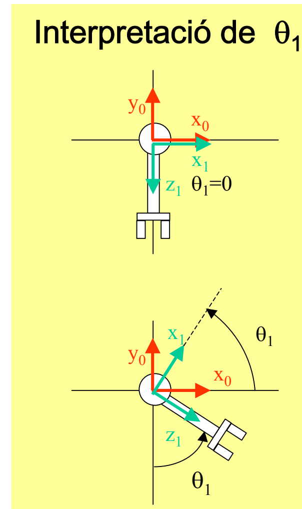
Tema II: Cinemàtica de la Posició.

UdG

Justificació Geomètrica de la solució del θ-r





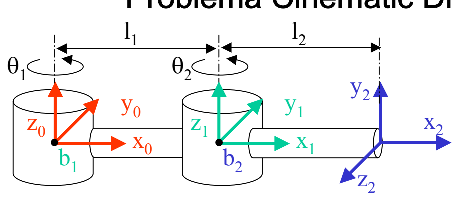


Tema II: Cinemàtica de la Posició.

UdG

1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

Problema Cinemàtic Directe del θ_1- θ_2



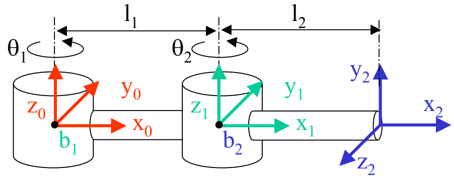
GDLL	θ_i	d_i	a_i	α_i	Home
1	q_1	0	l_1	0	0
2	q_2	0	l_2	90º	0

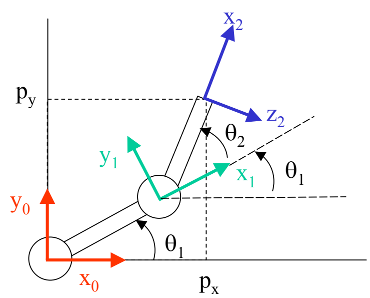
$$
{}^{i-1}A_i = {}^{i-1}\begin{pmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i \cdot s\theta_i & s\alpha_i \cdot s\theta_i & a_i \cdot c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i \cdot c\theta_i & -s\alpha_i \cdot c\theta_i & a_i \cdot s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i
\quad
{}^0A_1 = {}^0\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 \cdot c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 \cdot s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_1
\quad
{}^1A_2 = {}^1\begin{pmatrix} c_2 & 0 & s_2 & a_2 \cdot c_2 \\ s_2 & 0 & -c_2 & a_2 \cdot s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_2
$$

$$
{}^RT_H = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 = {}^0\begin{pmatrix} c_1c_2 - s_1s_2 & 0 & c_1s_2 + s_1c_2 & a_2c_1c_2 - a_2s_1s_2 + a_1c_1 \\ s_1c_2 + c_1s_2 & 0 & s_1s_2 - c_1c_2 & a_2s_1c_2 + a_2c_1s_2 + a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_1
\quad \text{com} \begin{cases} \sin(\theta_1 + \theta_2) = s_{12} = c_1s_2 + s_1c_2 \\ \cos(\theta_1 + \theta_2) = c_{12} = c_1c_2 - s_1s_2 \end{cases}
$$

$$
{}^RT_H = {}^0\begin{pmatrix} c_{12} & 0 & s_{12} & a_2c_{12} + a_1c_1 \\ s_{12} & 0 & -c_{12} & a_2s_{12} + a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_1
$$

Justificació Geométrica de la solució del θ_1- θ_2



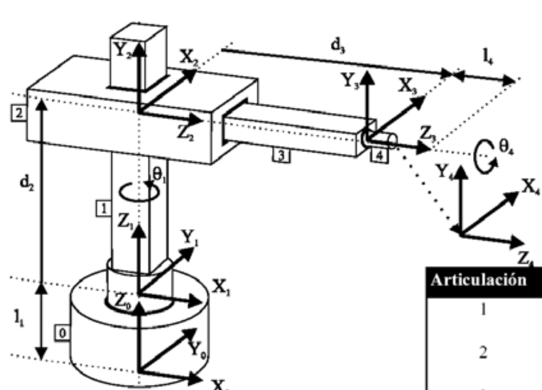


$$p_x = a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_{12}$$
$$p_y = a_1 \cdot s_1 + a_2 \cdot s_{12}$$

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

Robot Cilíndric de 4 G.D.LL



Articulación	θ	d	a	α
1	q_1	l_1	0	0
2	90º	d_2	0	90º
3	0	d_3	0	0
4	q_4	l_4	0	0

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa

Robot Cilíndric de 4 G.D.LL

$$
{}^{0}\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{1}\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{d}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{3}\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

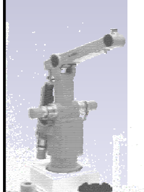
$$
\mathbf{T} = {}^{0}\mathbf{A}_1\,{}^{1}\mathbf{A}_2\,{}^{2}\mathbf{A}_3\,{}^{3}\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -S_1C_4 & S_1S_4 & C_1 & C_1(d_3+l_4) \\ C_1C_4 & -C_1S_4 & S_1 & S_1(d_3+l_4) \\ S_4 & C_4 & 0 & d_2+l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

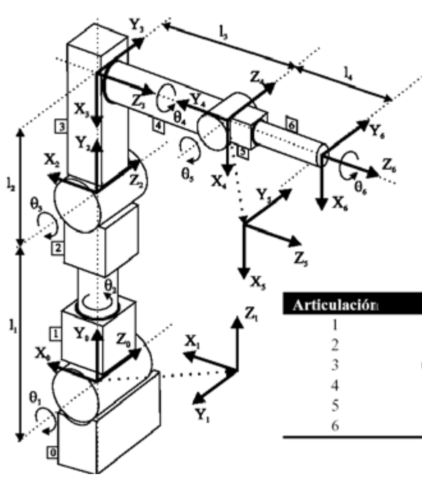
1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa



Robot ABB IRB 6400C de 6 G.D.LL



Articulación	θ	d	a	α
1	θ_1	0	0	-90
2	θ_2	l_1	0	90
3	θ_3-90	0	$-l_2$	90
4	θ_4	l_3	0	-90
5	θ_5	0	0	90
6	θ_6	l_4	0	0

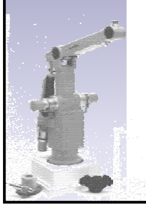
Tema II: Cinemàtica de la Posició.

Robot ABB IRB 6400C de 6 G.D.LL

$$
{}^{0}\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^{1}\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} S_3 & 0 & -C_3 & -l_2 S_3 \\ -C_3 & 0 & -S_3 & l_2 C_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^{3}\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{4}\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^{5}\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$



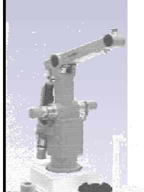
Tema II: Cinemàtica de la Posició.

Robot ABB IRB 6400C de 6 G.D.LL

$$
\mathbf{T} = {}^{0}\mathbf{A}_1\,{}^{1}\mathbf{A}_2\,{}^{2}\mathbf{A}_3\,{}^{3}\mathbf{A}_4\,{}^{4}\mathbf{A}_5\,{}^{5}\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

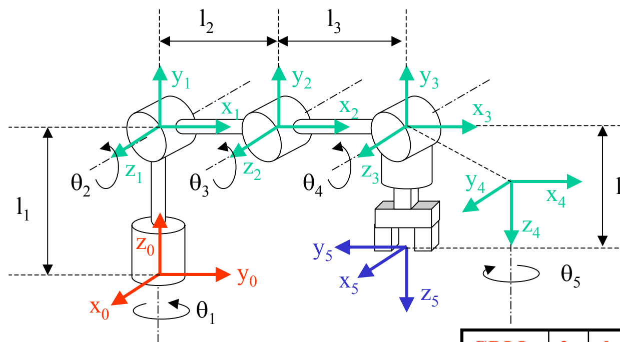
$$
\begin{aligned}
n_x &= (C_1C_2S_3 + S_1C_3)(C_4C_5C_6 - S_4S_6) + C_1S_2(S_4C_5C_6 + C_4S_6) + (-C_1C_2C_3 + S_1S_3)S_5C_6 \\
n_y &= (-S_1C_2S_3 + S_1C_3)(C_4C_5C_6 - S_4S_6) + S_1S_2(S_4C_5C_6 + C_4S_6) + (-S_1C_2C_3 - C_1S_3)S_5C_6 \\
n_z &= (-S_2S_3)(C_4C_5C_6 - S_4S_6) + C_2(S_4C_5C_6 + C_4S_6) + S_2C_3S_5C_6 \\
o_x &= (C_1C_2S_3 + S_1C_3)(-C_4C_5C_6 - S_4S_6) + C_1S_2(-S_4C_5C_6 + C_4S_6) + (-C_1C_2C_3 + S_1S_3)(-S_5C_6) \\
o_y &= (-S_1C_2S_3 + S_1C_3)(-C_4C_5C_6 - S_4S_6) + S_1S_2(-S_4C_5C_6 + C_4S_6) + (-S_1C_2C_3 - C_1S_3)(-S_5C_6) \\
o_z &= (-S_2S_3)(-C_4C_5C_6 - S_4S_6) + C_2(-S_4C_5C_6 + C_4S_6) + S_2C_3(-S_5C_6) \\
p_x &= (C_1C_2S_3 + S_1C_3)(l_4C_4S_5) + C_1S_2(l_4S_4S_5) + (C_1C_2C_3 + S_1S_3)(-l_4C_5 + l_3) + \\
&\qquad (-l_2C_1C_2S_3 - l_2S_1C_3 - l_1S_1) \\
p_y &= (-S_1C_2S_3 - C_1C_3)(l_4C_4S_5) + S_1S_2(l_4S_4S_5) + (-C_1C_2C_3 - C_1S_3)(-l_4C_5 + l_3) + \\
&\qquad (-l_2S_1C_2S_3 - l_2C_1C_3 + l_1C_1) \\
p_z &= (-S_2S_3)(l_4C_4C_5) + C_2(l_4S_4S_5) + S_2C_3(-l_4C_5 + l_3) + l_2S_2S_3
\end{aligned}
$$

$$
\hat{a} = \hat{n} \times \hat{o}
$$



Tema II: Cinemàtica de la Posició.

Robot Mitsubishi MoveMasterEX RV-M1



GDLL	θ_i	d_i	a_i	α_i	Home
1	q_1	l_1	0	90º	90º
2	q_2	0	l_2	0	0
3	q_3	0	l_3	0	0
4	q_4	0	0	90º	0
5	q_5	l_5	0	0	90º

Tema II: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa

Robot Mitsubishi MoveMasterEX RV-M1

$$
{}^0T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; {}^1T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 \cdot C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 \cdot S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ;
$$

$$
{}^2T_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3 \cdot C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 \cdot S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; {}^3T_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ;
$$

$$
{}^4T_5 = \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^RT_H = \begin{bmatrix} C_1C_{234}C_5 + S_1S_5 & -C_1C_{234}S_5 + S_1C_5 & -C_1S_{234} & C_1(a_2C_2 + a_3C_{23} - d_5S_{234}) \\ S_1C_{234}C_5 + C_1S_5 & -S_1C_{234}S_5 - C_1C_5 & -S_1S_{234} & S_1(a_2C_2 + a_3C_{23} - d_5S_{234}) \\ -S_{234}C_5 & S_{234}S_5 & -C_{234} & d_1 - a_2S_2 - a_3S_{23} - d_5C_{234} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$