Tema III: Cinemàtica de la Posició.

Robot Mitsubishi RV-M1

$$
{}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \ {}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 \cdot C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 \cdot S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;
$$

$$
{}^{2}T_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3 \cdot C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 \cdot S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \ {}^{3}T_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;
$$

$$
{}^{4}T_5 = \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{R}T_H = \begin{pmatrix} c_1 c_{234} c_5 + s_1 s_5 & -c_1 c_{234} s_5 + s_1 c_5 & c_1 s_{234} & c_1\left(d_5 s_{234} + a_3 c_{23} + a_2 c_2\right) \\ s_1 c_{234} c_5 - c_1 s_5 & -s_1 c_{234} s_5 - c_1 c_5 & s_1 s_{234} & s_1\left(d_5 s_{234} + a_3 c_{23} + a_2 c_2\right) \\ s_{234} c_5 & -s_{234} s_5 & -c_{234} & -d_5 c_{234} + a_3 s_{23} + a_2 s_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

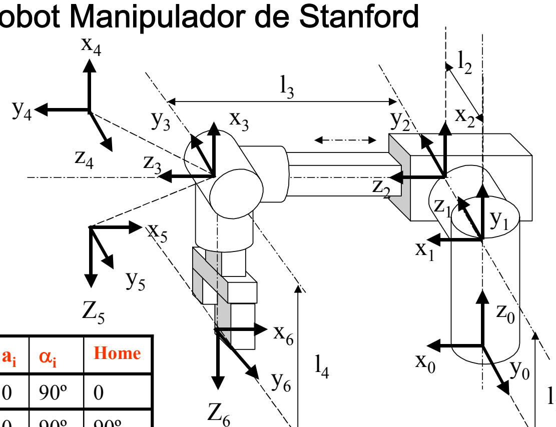
Tema III: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa

Robot Manipulador de Stanford



GDLL	θ_i	d_i	a_i	α_i	Home
1	q_1	l_1	0	90º	0
2	q_2	l_2	0	90º	90º
3	0	q_3	0	0	l_3
4	q_4	0	0	90º	0
5	q_5	0	0	90º	-90º
6	q_6	l_4	0	0	0

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa

Robot Manipulador de Stanford

$$
{}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i \cdot s\theta_i & s\alpha_i \cdot s\theta_i & a_i \cdot c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i \cdot c\theta_i & -s\alpha_i \cdot c\theta_i & a_i \cdot s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i \quad
{}^{0}A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_1 \quad
{}^{1}A_2 = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_2
$$

$$
{}^{2}A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_3 \quad
{}^{3}A_4 = \begin{pmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_4 \quad
{}^{4}A_5 = \begin{pmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_5 \quad
{}^{5}A_6 = \begin{pmatrix} c_6 & s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_6
$$

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa

Robot Manipulador de Stanford

${}^{R}T_{H}$

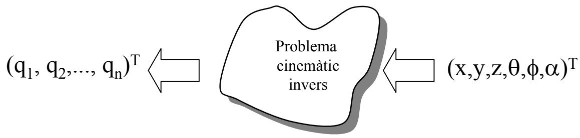
$n_x=c_1 \cdot c_2 \cdot (c_4 \cdot c_5 \cdot c_6+s_4 \cdot s_6)+s_1 \cdot (s_4 \cdot c_5 \cdot c_6-c_4 \cdot s_6)+c_1 \cdot s_2 \cdot s_5 \cdot c_6$
$n_y=s_1 \cdot c_2 \cdot (c_4 \cdot c_5 \cdot c_6+s_4 \cdot s_6)-c_1 \cdot (s_4 \cdot c_5 \cdot c_6-c_4 \cdot s_6)+s_1 \cdot s_2 \cdot s_5 \cdot c_6$
$n_z=s_2 \cdot (c_4 \cdot c_5 \cdot c_6+s_4 \cdot s_6)-c_2 \cdot s_5 \cdot c_6$

$o_x=c_1 \cdot c_2 \cdot (-c_4 \cdot c_5 \cdot s_6+s_4 \cdot c_6)+s_1 \cdot (-s_4 \cdot c_5 \cdot s_6-c_4 \cdot c_6)-c_1 \cdot s_2 \cdot s_5 \cdot s_6$
$o_y=s_1 \cdot c_2 \cdot (-c_4 \cdot c_5 \cdot s_6+s_4 \cdot c_6)-c_1 \cdot (-s_4 \cdot c_5 \cdot s_6-c_4 \cdot c_6)-s_1 \cdot s_2 \cdot s_5 \cdot s_6$
$o_z=s_2 \cdot (-c_4 \cdot c_5 \cdot s_6+s_4 \cdot c_6)+c_2 \cdot s_5 \cdot s_6$

$a_x= c_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot s_5+s_1 \cdot s_4 \cdot s_5-c_1 \cdot s_2 \cdot c_5$
$a_y= s_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot s_5-c_1 \cdot s_4 \cdot s_5-s_1 \cdot s_2 \cdot c_5$
$a_z= s_2 \cdot c_4 \cdot s_5+c_2 \cdot c_5$

$p_x= c_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot s_5 \cdot d_6+s_1 \cdot s_4 \cdot s_5 \cdot d_6-c_1 \cdot s_2 \cdot c_5 \cdot d_6+c_1 \cdot s_2 \cdot d_3+s_1 \cdot d_2$
$p_y= s_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot s_5 \cdot d_6-c_1 \cdot s_4 \cdot s_5 \cdot d_6-s_1 \cdot s_2 \cdot c_5 \cdot d_6+s_1 \cdot s_2 \cdot d_3-c_1 \cdot d_2$
$p_z= s_2 \cdot c_4 \cdot s_5 \cdot d_6+c_2 \cdot c_5 \cdot d_6-c_2 \cdot d_3+d_1$

Cinemàtica Inversa



Problema cinemàtic invers

Donada una determinada posició (x,y,z) i una determinada orientació (RPY) obtenir el valor de les variables d'unió ($q_1, q_2,\ldots, q_n$) que situen el manipulador en la configuració desitjada.

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

UdG

1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

Propietats Generals de la Solució

1. Sigui $P \equiv$espai accessible ($P \subset \Re^3$) i p la posició a assolir, $p \notin P \Rightarrow$no $\exists$ Solució.
2. Sigui R el conjunt d'orientacíons possibles, i (θ,ϕ,α) l'orientació RPY a assolir, $(\theta,\phi,\alpha) \notin R \Rightarrow$no $\exists$ Solució.
   Notar que no totes les orientacions són possibles degut a:
   - Limitacions mecàniques a les articulacions
   - Falta d'algun dels 3 G.D.LL.
3. Igualar la matriu simbólica a la matriu númerica del braç proporciona 12 equacions:

$$^{R}T_H = {}^{R}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{11} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_H = {}^{R}\begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_H$$

Per un robot de **n** G.D.LL. Tenim **12 equacions** i **n incognites**.

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

Propietats Generals de la Solució

- Les 12 eq. no són linialment independents:

sigui: $^{R}T_{H} = {}^{R}\begin{pmatrix} ^{R}R_{H} & p \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{H}$ donat que $^{R}R_{H}$ és una matriu de rotació

s'acompleix que:

$$\hat{a} \perp \hat{n} \Rightarrow \hat{a} \cdot \hat{n} = 0 \ ; \ \hat{a} \perp \hat{o} \Rightarrow \hat{a} \cdot \hat{o} = 0 \ ; \ \hat{n} \perp \hat{o} \Rightarrow \hat{n} \cdot \hat{o} = 0$$

$$|\hat{n}| = 1 \ ; \ |\hat{o}| = 1 \ ; \ |\hat{a}| = 1$$

Aquestes 6 eq. mostren depèndencies entre les 12 anteriors, reduint el nº d'eq. **independents a 6** amb **n incógnites.**

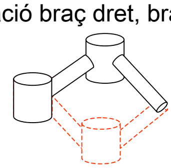
4. Manipulació en 3D $\Rightarrow$ n G.D.LL$\geq$6 (condició necessària però no suficient).
5. No sempre existeix una solució simbólica.

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

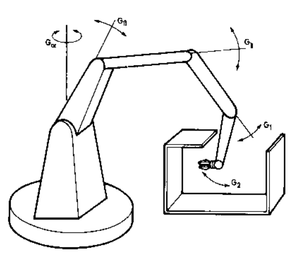
1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

Propietats Generals de la Solució

6. Quan la solució existeix no sempre és única:
   - Configuració braç dret, braç esquerre



   - Configuracions redundants



Tema III: Cinemàtica de la Posició.

UdG

Métodes de Resolució

1. Solució Geométrica.
   - Només aplicable a robots de pocs G.D.LL (3 o menys).
   - Aplicable als 3 primers G.D.LL d'alguns robots complexes.
   - La solució és aplicable en temps real.
   - No és genérica. Depén del manipulador.
2. Solució Simbólica.
   - No sempre es pot trobar.
   - La solució és aplicable en temps real.
   - No és genérica. Depén del manipulador.
3. Desacoplament cinemàtic
   - Métode Híbrid entre els 2 anteriors.
4. Solució numérica iterativa.
   - Genérica. Depén dels paràmetres DH.
   - Lenta. No aplicable en temps real.

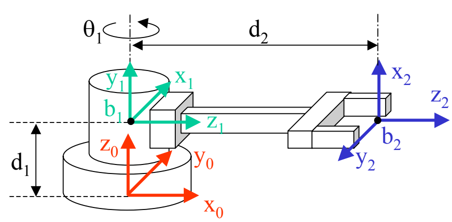
$\Big\}$ No l'estudiarem

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

UdG

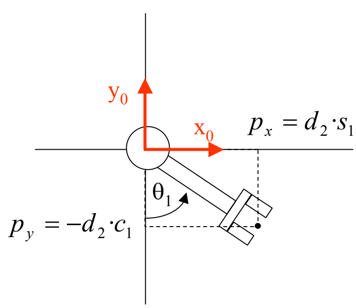
1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

Solució Geométria del (θ-r)



$$ {}^{0}_{R}T_{H} = \begin{pmatrix} 0 & -c_1 & s_1 & d_2 \cdot s_1 \\ 0 & -s_{10} & -c_1 & -d_2 \cdot c_1 \\ 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_1 $$

Cal utilitzar la funció atan2!!



$p_x = d_2 \cdot s_1$

$p_y = -d_2 \cdot c_1$

$$ \frac{p_x}{-p_y} = \frac{d_2 \cdot s_1}{d_2 \cdot c_1} = \frac{s_1}{c_1} \Rightarrow q_1 = \tan^{-1}\left(\frac{p_x}{-p_y}\right) $$

$$ q_2 = \sqrt{p_x^{\,2} + p_y^{\,2}} $$

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

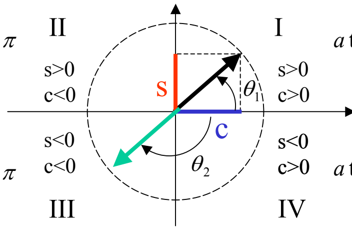
1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

atan2(s,c)

- Problema de la tan⁻¹: $-\frac{\pi}{2} \le \tan^{-1}(t) \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \exists \theta_1 \ne \theta_2 \,/\, \tan(\theta_1) = \tan(\theta_2)$

$$a\tan 2(s,c) = \tan^{-1}\left(\frac{s}{c}\right) + \pi$$

$$a\tan 2(s,c) = \tan^{-1}\left(\frac{s}{c}\right)$$



$$a\tan 2(s,c) = \tan^{-1}\left(\frac{s}{c}\right) - \pi$$

$$a\tan 2(s,c) = \tan^{-1}\left(\frac{s}{c}\right)$$

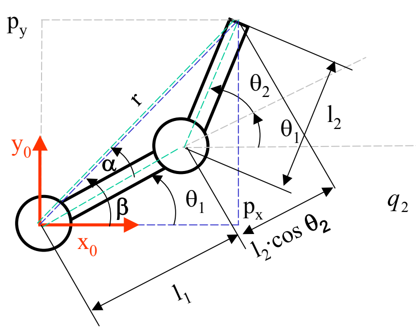
Solució:

$$a\tan 2(s,c) = \begin{cases} \left.\begin{matrix} c>0 \\ Q-I, Q-IV \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\tan 2(s,c) = \tan^{-1}\left(\frac{s}{c}\right) \\ \left.\begin{matrix} c=0 \\ Q-I, Q-IV \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\tan 2(s,c) = \mathrm{sgn}(s)\cdot\frac{\pi}{2} \\ \left.\begin{matrix} c<0 \\ Q-II, Q-III \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\tan 2(s,c) = \tan^{-1}\left(\frac{s}{c}\right) + \mathrm{sgn}(s)\cdot\pi \end{cases}$$

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

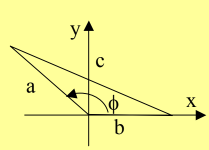
1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

Solució Geométrica del (θ_1- θ_2)



$$q_2 \rightarrow \begin{cases} r^2 = p_x^{\,2} + p_y^{\,2} \\ r^2 = l_1^{\,2} + l_2^{\,2} - 2 \cdot l_1 \cdot l_1 \cdot \cos(\pi - \theta_2) \\ r^2 = l_1^{\,2} + l_2^{\,2} + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_2) \\ \cos(\theta_2) = \dfrac{r^2 - l_1^{\,2} - l_2^{\,2}}{2 \cdot l_1 \cdot l_2} \\ \theta_2 = \cos^{-1}\left(\dfrac{r^2 - l_1^{\,2} - l_2^{\,2}}{2 \cdot l_1 \cdot l_2}\right) \end{cases}$$

Teorema de Cosinus



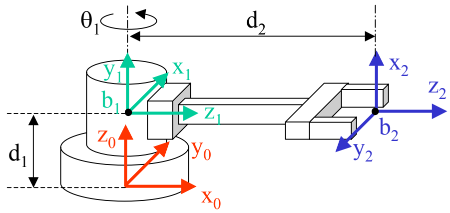
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\phi)$$

$$q_1 \rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \beta - \alpha \\ \beta = a\tan 2(p_y, p_x) \\ \alpha = a\tan 2(l_2 \cdot \sin\theta_2, l_1 + l_2 \cdot \cos\theta_2) \end{cases}$$

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

Solució Simbólica del (θ-r)



$$\underbrace{}_{}\text{Matriu Simbólica} \qquad \text{Matriu Numérica coneguda}$$

$$^{R}T_{H} = {}^{0}\begin{pmatrix} 0 & -c_1 & s_1 & d_2 \cdot s_1 \\ 0 & -s_{10} & -c_1 & -d_2 \cdot c_1 \\ 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2} = {}^{R}\begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{H}$$

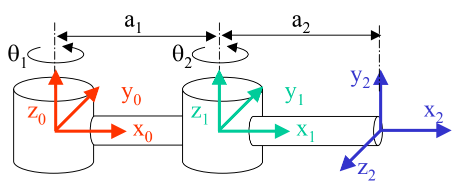
$$q_1 \Rightarrow \theta_1 = a\tan 2(a_x, -a_y)$$

$$q_2 \Rightarrow p_x^{\;2} + p_y^{\;2} = (d_2 \cdot s_1)^2 + (-d_2 \cdot c_1)^2 = d_2^{\;2} \cdot \left(s_1^{\;2} + c_1^{\;2}\right) = d_2^{\;2} \Rightarrow d_2 = \sqrt{p_x^{\;2} + p_y^{\;2}}$$

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades
2 Cinemàtica directa
3 Cinemàtica inversa

Solució Simbólica del (θ_1- θ_2)

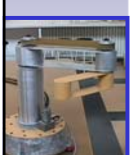


$$\text{Matriu Simbólica} \qquad \text{Matriu Numérica coneguda}$$

$$^{R}T_{H} = {}^{0}\begin{pmatrix} c_{12} & 0 & s_{12} & a_2 c_{12} + a_1 c_1 \\ s_{12} & 0 & -c_{12} & a_2 s_{12} + a_1 s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2} = {}^{R}\begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{H}$$

$$q_1 \to \theta_1 = a\tan 2(p_y - a_2 \cdot a_x, p_x + a_2 \cdot a_y)$$

$$q_2 \to \begin{cases} \theta_{12} = a\tan 2(n_y, n_x) \\ \theta_2 = \theta_{12} - \theta_1 \end{cases}$$



Tema III: Cinemàtica de la Posició.

UdG

1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa

Solució Simbólica del Mitsubishi RV-M1

$$
{}^{R}T_{H} = \begin{pmatrix} c_1c_{234}c_5 + s_1s_5 & -c_1c_{234}s_5 + s_1c_5 & c_1s_{234} & c_1\left(d_5s_{234} + a_3c_{23} + a_2c_2\right) \\ s_1c_{234}c_5 - c_1s_5 & -s_1c_{234}s_5 - c_1c_5 & s_1s_{234} & s_1\left(d_5s_{234} + a_3c_{23} + a_2c_2\right) \\ s_{234}c_5 & -s_{234}s_5 & -c_{234} & -d_5c_{234} + a_3s_{23} + a_2s_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

- Assumirem que la posició d'entrada està expressada utilitzant el vector configuració

$$
W = \overbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{pmatrix}}^{\text{Vector Configuració numèric}} = \overbrace{\begin{pmatrix} c_1\left(d_5s_{234} + a_3c_{23} + a_2c_2\right) \\ s_1\left(d_5s_{234} + a_3c_{23} + a_2c_2\right) \\ -d_5c_{234} + a_3s_{23} + a_2s_2 + d_1 \\ \left(e^{\frac{q_5}{\pi}}\right)c_1s_{234} \\ \left(e^{\frac{q_5}{\pi}}\right)s_1s_{234} \\ -\left(e^{\frac{q_5}{\pi}}\right)c_{234} \end{pmatrix}}^{\text{Vector Configuració Simbòlic}}
$$

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

UdG

1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa

Solució Simbólica del Mitsubishi RV-M1

$$
\left.\begin{array}{l} w_1 = c_1\left(d_5s_{234} + a_3c_{23} + a_2c_2\right) \\ w_2 = s_1\left(d_5s_{234} + a_3c_{23} + a_2c_2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{q_1 = a\tan 2(w_2, w_1)}
$$

$$
c_1w_4 + s_1w_5 = \left(e^{\frac{q_5}{\pi}}\right)s_{234}(s_1^{\,2} + c_1^{\,2})^2 \Rightarrow \boxed{q_{234} = a\tan 2\left(c_1w_4 + s_1w_5, -w_6\right)}
$$

$$
\left.\begin{array}{l} \overbrace{c_1w_1 + s_1w_2 - d_5s_{234}}^{b_1} = a_3c_{23} + a_2c_2 \\ \underbrace{w_3 + d_5c_{234} - d_1}_{b_2} = a_3s_{23} + a_2s_2 \end{array}\right\} \Rightarrow
$$

$$
b_1^{\,2} + b_2^{\,2} = a_3^{\,2}c_{23}^{\,2} + a_2^{\,2}c_2^{\,2} + 2a_3c_{23}a_2c_2 + a_3^{\,2}s_{23}^{\,2} + a_2^{\,2}s_2^{\,2} + 2a_3s_{23}a_2s_2
$$

$$
b_1^{\,2} + b_2^{\,2} = a_3^{\,2}(c_{23}^{\,2} + s_{23}^{\,2}) + a_2^{\,2}(c_2^{\,2} + s_2^{\,2}) + 2a_3a_2(c_{23}c_2 + s_{23}s_2)
$$

$$
b_1^{\,2} + b_2^{\,2} = a_3^{\,2} + a_2^{\,2} + 2a_3a_2\cos(q_2 + q_3 - q_2)
$$

$$
\cos(q_3) = \frac{b_1^{\,2} + b_2^{\,2} - a_3^{\,2} - a_2^{\,2}}{2a_3a_2} \Rightarrow \boxed{q_3 = \pm\cos^{-1}\left(\frac{b_1^{\,2} + b_2^{\,2} - a_3^{\,2} - a_2^{\,2}}{2a_3a_2}\right)}
$$

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa

Solució Simbólica del Mitsubishi RV-M1

$$\left\{\begin{matrix} b_1 = a_3 c_{23} + a_2 c_2 \\ b_2 = a_3 s_{23} + a_2 s_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} b_1 = a_3(c_2 c_3 - s_2 s_3) + a_2 c_2 \\ b_2 = a_3(c_2 s_3 + s_2 c_3) + a_2 s_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} b_1 = (a_3 c_3 + a_2) c_2 - (a_3 s_3) s_2 \\ b_2 = (a_3 s_3) c_2 + (a_3 c_3 + a_2) s_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} (a_3 c_3 + a_2) b_1 = (a_3 c_3 + a_2)^2 c_2 - (a_3 c_3 + a_2)(a_3 s_3) s_2 \\ (a_3 s_3) b_2 = (a_3 s_3)^2 c_2 + (a_3 s_3)(a_3 c_3 + a_2) s_2 \end{matrix}\right\}$$

afegint ambdues equacions obtenim

$$(a_3 c_3 + a_2) b_1 + (a_3 s_3) b_2 = \left((a_3 c_3 + a_2)^2 + (a_3 s_3)^2\right) c_2$$

$$c_2 = \frac{(a_3 c_3 + a_2) b_1 + (a_3 s_3) b_2}{\left((a_3 c_3 + a_2)^2 + (a_3 s_3)^2\right)}$$

$$\left\{\begin{matrix} b_1 = (a_3 c_3 + a_2) c_2 - (a_3 s_3) s_2 \\ b_2 = (a_3 s_3) c_2 + (a_3 c_3 + a_2) s_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} -(a_3 s_3) b_1 = -(a_3 s_3)(a_3 c_3 + a_2) c_2 + (a_3 s_3)^2 s_2 \\ (a_3 c_3 + a_2) b_2 = (a_3 s_3)(a_3 c_3 + a_2) c_2 + (a_3 c_3 + a_2)^2 s_2 \end{matrix}\right\}$$

afegint ambdues equacions obtenim

$$(a_3 c_3 + a_2) b_2 - (a_3 s_3) b_1 = \left((a_3 c_3 + a_2)^2 + (a_3 s_3)^2\right) s_2$$

$$s_2 = \frac{(a_3 c_3 + a_2) b_2 - (a_3 s_3) b_1}{\left((a_3 c_3 + a_2)^2 + (a_3 s_3)^2\right)}$$

$$\boxed{q_2 = a\tan 2\left((a_3 c_3 + a_2) b_2 - (a_3 s_3) b_1, (a_3 c_3 + a_2) b_1 + (a_3 s_3) b_2\right)}$$

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa

Solució Simbólica del Mitsubishi RV-M1

$$\boxed{q_4 = q_{234} - q_2 - q_3}$$

$$e^{\frac{q_5}{\pi}} = \left|(w_4 \quad w_5 \quad w_6)^T\right| \Rightarrow \boxed{q_5 = \pi \ln\left(\left|(w_4 \quad w_5 \quad w_6)^T\right|\right)}$$

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

Solució Simbólica del Mitsubishi RV-M1

$$\boxed{q_1 = a\tan 2(w_2, w_1)}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{q_{234} = a\tan 2\left(c_1 w_4 + s_1 w_5, -w_6\right)}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{q_3 = \pm\cos^{-1}\left(\frac{b_1^2 + b_2^2 - a_3^2 - a_2^2}{2a_3 a_2}\right)}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{q_2 = a\tan 2\left((a_3c_3 + a_2)b_2 - (a_3s_3)b_1, (a_3c_3 + a_2)b_1 + (a_3s_3)b_2\right)}$$

$$\downarrow$$

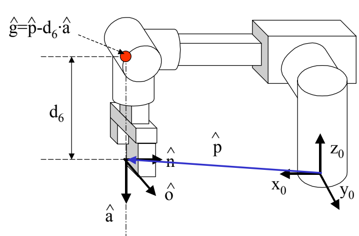
$$\boxed{q_4 = q_{234} - q_2 - q_3}$$

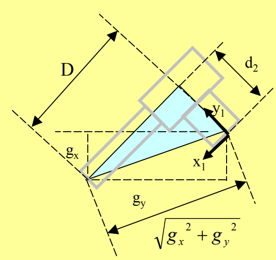
$$\downarrow$$

$$\boxed{q_5 = \pi \ln\left(\left\|\begin{pmatrix} w_4 & w_5 & w_6 \end{pmatrix}^T\right\|\right)}$$

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

Desacoplament cinemàtic del manipulador de Stanford





$$D^2 = \left(g_x^{\,2} + g_y^{\,2}\right) - d_2^{\,2}$$

$$\boxed{D = \sqrt{\left(g_x^{\,2} + g_y^{\,2}\right) - d_2^{\,2}}}$$

Caculem:

- $(\theta_1, \ldots \theta_3)$ Geometricament
- $(\theta_4, \ldots \theta_6)$ Simbolicament

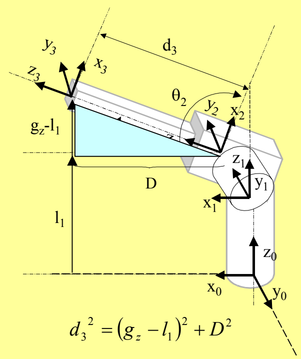
Tema III: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

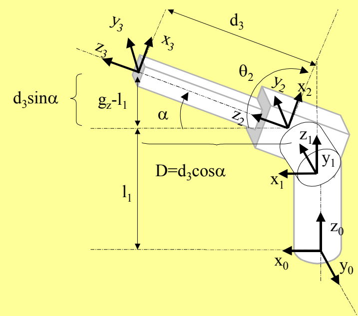
3 Cinemàtica inversa

Desacoplament cinemàtic del manipulador de Stanford



$$d_3^2 = (g_z - l_1)^2 + D^2$$

$$\boxed{d_3 = \sqrt{(g_z - l_1)^2 + D^2}}$$



$$\boxed{\theta_2 = \overbrace{a\tan 2(g_z - l_1, D)}^{\alpha} + \frac{\pi}{2}}$$

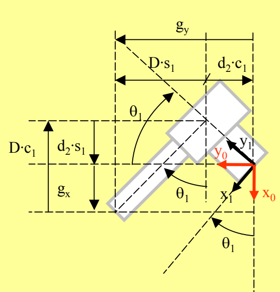
Tema III: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa

Desacoplament cinemàtic del manipulador de Stanford



$$\begin{cases} g_x = -D{\cdot}c_1 - d_2{\cdot}s_1 & \text{(eq.1)} \\ g_y = D{\cdot}s_1 - d_2{\cdot}c_1 & \text{(eq.2)} \end{cases}$$

de la (eq.1) trobem:

$$s_1 = \frac{-g_x - D{\cdot}c_1}{d_2} \quad \text{(eq.3)}$$

substituint a la (eq.2) obtenim:

$$c_1 = \frac{d_2{\cdot}g_y + D{\cdot}g_x}{-D^2 - d_2^2}$$

substituint ara a la (eq.3) obtenim:

$$s_1 = \frac{D(d_2 g_y + D g_x) - g_x(D^2 + d_2^2)}{d_2(D^2 + d_2^2)}$$

finalment podem calcular l'angle:

$$\boxed{\theta_1 = a\tan 2\left(\frac{D(d_2 g_y + D g_x) - g_x(D^2 + d_2^2)}{d_2(D^2 + d_2^2)}, \frac{d_2{\cdot}g_y + D{\cdot}g_x}{-D^2 - d_2^2}\right)}$$

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa

Desacoplament cinemàtic del manipulador de Stanford

- La solució de (θ_4,.. θ_6) la realitzariem Simbolicament, no ho farem donat que surt molt complicada.

Tema III: Cinemàtica de la Posició.

1 Sistemes de Coordenades

2 Cinemàtica directa

3 Cinemàtica inversa

DIAGRAMA DE BLOCS D'UN ROBOT INDUSTRIAL